数理解析研究所講究録 1384 巻 2004 年 87-93

Riemann ゼータ関数のスペクトルについて

名大多元　神谷諭一 (Yuichi Kamiya)
Graduate School of Mathematics
Nagoya University

$s=\sigma+it$ を複素変数とする．Riemann ゼータ関数 $\zeta(s)$ が有する重要な性質として次の 5 つを挙げよう．

1. $\sigma>1$ では $\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}1/n^{s}$ なる Dirichlet 級数表示を持つ．
2. $\zeta(s)$ は $s=1$ を除き正則である．$s=1$ では一位の極を持ち，留数は 1 である．
3. $\zeta(s)$ は Euler 積を持つ．
4. $\zeta(s)$ は関数等式を持つ．
5. 次の平均値定理が成立する：

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}|\zeta(\sigma+it)|^{2}dt=\zeta(2\sigma),\quad \sigma>1/2,\ \sigma\neq 1,$$
$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T\log T}\int_{-T}^{T}|\zeta(1/2+it)|^{2}dt=1.$$

5 の平均値定理は上の性質 1,2,4 からの帰結である．即ち，性質 1,2,4 から $\zeta(s)$ の近似関数等式と呼ばれる表示式を作り，その表示式の絶対値の二乗を上手に評価して行くことによって導かれる．

私はこの平均値定理を勉強して以来，この定理に関数解析的な意味があるかもしれないと思ってきた．L^{2} ノルムに似ているなあと思ってきた．この疑問を動機として Riemann ゼータ関数を関数解析的な立場から勉強しており，若干，まとまった考察ができたのでここで報告したいと思う．

その前に次の二点を注意しておこう．$\zeta(s)$ が Euler 積を持つという事実については何も考察が進んでいないこと，平均値定理が成立する理由への一つの美しい研究が Besicovitch 氏によってなされているということ (Besicovitch の概周期関数の理論) である．

Riemann ゼータ関数 $\zeta(\sigma+it)$ について σ を $\sigma<1$ の範囲に固定し t 変数の関数とみたとき，これに関数解析的な意味を持たせたいのであるが，まずは σ を $\sigma>1$ に固定した場合で考えてみることが肝要であろう．$\sigma>1$ のと

きは性質1からただちに

$$|\zeta(s)| \le \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\sigma}} < \infty$$

を得る．従って $\zeta(\sigma+it)$ について σ を $\sigma>1$ の範囲に固定し t 変数の関数とみたとき，これは $\mathbf{R}$ 上の有界関数である．さて，ここで Banach 空間

$$L^{\infty} = \{\Phi : \mathbf{R} \to \mathbf{C};\ \text{可測}\ s.t.\ \operatorname*{esssup}_{t\in\mathbf{R}} |\Phi(t)| < \infty\}$$

を導入しよう．$\zeta(\sigma+it)$, $\sigma>1$, は L^{∞} に属す．L^{∞} と密接に関連する Banach 空間

$$L^{1} = \{f : \mathbf{R} \to \mathbf{C};\ \text{可測}\ s.t. \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|dt < \infty\}$$

を導入することは当然であろう．というのも，L^1 の共役空間

$$(L^1)^* = \{\varphi : L^1 \to \mathbf{C};\ \text{線型かつ有界}\ \}$$

が次の意味で L^{∞} と同型であるからである．

事実 1 L^{∞} と $(L^1)^*$ は Banach 空間として同型である。即ち, $\Phi \in L^{\infty}$ に対し $\varphi \in (L^1)^*$ を

$$\varphi(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(t) f(t) dt, \quad f \in L^1$$

によって与える写像は全単射かつ等長である．

さて，$\zeta(\sigma+it)$, $\sigma>1$, は L^{∞} に属すので

$$\varphi_{\zeta}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \zeta(\sigma+it) f(t) dt, \quad f \in L^1$$

によって定まる φ_{ζ} が $\zeta(\sigma+it)$ に対応する $(L^1)^*$ の元である．

とにかく，$\sigma>1$ のとき Riemann ゼータ関数を L^1 上の有界線型汎関数とみることができたわけだけれど，このままでは何も面白いことはない．有界線型汎関数とみることによって関数解析的な考察をしなければならない．ここで，$L^{\infty}(=(L^1)^*)$ の元を三角多項式で(弱い意味で)近似する場合に議論すべきスペクトル集合という概念について述べよう．

$L^{\infty}(=(L^1)^*)$ に L^1 から導入される $*$ 弱位相を導入しておく．$\{e^{i\lambda t}\}_{\lambda\in\mathbf{R}}$ で張られる空間の $*$ 弱閉包が L^{∞} に一致することに注意しよう．L^{∞} の元 φ を

* 弱位相のもとで $e^{i\lambda t}$, λ は実数，たちで近似することを考えるとき，λ はどのような集合であるべきか (なるべく小さい方がよい)，を問題にする．これがスペクトル集合の概念であり，正確な定義は次のようになる．

定義 1 $\varphi \in L^\infty$ に対し

$$\mathrm{Sp}(\varphi) = \bigcap_{f \in L^1, f*\varphi=0} \{\lambda \in \mathbf{R}\ s.t. \widehat{f}(\lambda) = 0\}$$

と定義する．$\mathrm{Sp}(\varphi)$ を φ のスペクトル集合という．

次の事実がある．

事実 2 $\varphi \in L^\infty$ とする．$\Lambda \subset \mathbf{R}$ は，L^∞ において $\{e^{i\lambda t}\}_{\lambda\in\Lambda}$ で張られる空間の * 弱閉包を考えたときこの中に φ が入る，ものとする．このとき

$$\mathrm{Sp}(\varphi) = \bigcap_{\Lambda} \{\text{そういう } \Lambda\}$$

となる．

この事実から次の予想を立てることは自然であろう．

Beurling の Spectral Synthesis 予想 任意の $\varphi \in L^\infty$ は，L^∞ において $\{e^{i\lambda t}\}_{\lambda\in\mathrm{Sp}(\varphi)}$ で張られる空間の * 弱閉包に入る．

$L^\infty(\mathbf{R}^3)$ における類似の予想に対する反例が与えられているけれども，Spectral Synthesis 予想が果たした貢献は極めて大きいそうである．

私は，$\zeta(\sigma+it)$ について σ を固定し t 変数の関数とみたとき，そのスペクトル集合を研究した．$\zeta_\sigma(t) = \zeta(\sigma+it)$ とおこう．$\sigma > 1$ のとき，ζ_σ は L^∞ に属すので $\mathrm{Sp}(\zeta_\sigma)$ が考えられ，容易に

$$\mathrm{Sp}(\zeta_\sigma) = \{-\log n\}_{n=1}^\infty$$

がわかる．一方，$\sigma < 1$ のとき，ζ_σ は L^∞ に属さないことが知られているので，この場合どのようにスペクトル集合を定義するかが問題になってくる．この場合に関しても Beurling [1] によりその定義が与えられている．

定義 2 φ は $\mathbf{R}$ 上の可測関数で，任意の正数 u に対して

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(t)| e^{-u|t|} dt < \infty \tag{1}$$

を満たすものとする．この φ に対し $U_\varphi(u,v)$，$u>0$, $v\in\mathbf{R}$, を

$$U_\varphi(u,v)=\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(t)e^{-u|t|-itv}dt$$

で定義する．$\mathcal{O}$ は $\mathbf{R}$ の開区間で，$\mathcal{O}$ に含まれる任意の v-閉区間上で $u\to+0$ のとき $U_\varphi(u,v)$ は一様に 0 に収束する，ものとする．このとき

$$\mathrm{Sp}'(\varphi)=\left(\bigcup_{\mathcal{O}}\{\text{そういう }\mathcal{O}\}\right)\text{の補集合}$$

と定義する．

例として，$\sigma>1$ のとき，$\mathrm{Sp}'(\zeta_\sigma)$ を求めてみよう．

$$\begin{aligned}U_{\zeta_\sigma}(u,v)&=\int_{-\infty}^{\infty}\zeta(\sigma+it)e^{-u|t|-itv}dt\\&=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^\sigma}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-u|t|-it(v+\log n)}dt\\&=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^\sigma}\cdot\frac{2u}{u^2+(v+\log n)^2}\end{aligned}$$

となり，この表示から

$$\mathrm{Sp}'(\zeta_\sigma)=\{-\log n\}_{n=1}^{\infty}$$

がわかる．

定義 2 の利点としては，非有界な関数でも条件 (1) を満たしていれば考察できうることと，精密な計算に持ち込めるかもしれないこととである．もちろん，φ が有界であるとき，$\mathrm{Sp}(\varphi)$ と $\mathrm{Sp}'(\varphi)$ の関係が気になる．これについては，$\varphi\in L^\infty$ について $\mathrm{Sp}(\varphi)=\mathrm{Sp}'(\varphi)$ となることが知られている．

それでは，$0<\sigma<1$ のとき，$\mathrm{Sp}'(\zeta_\sigma)$ を考察してみよう．つまり $U_{\zeta_\sigma}(u,v)$ の $u\to+0$ としたときの挙動を調べるのであるが，細かい計算をする必要があり，ここでは詳細を述べることができない．大雑把な説明によって雰囲気を伝えたいと思う．

N が大きいとき

$$\zeta_\sigma(t)\fallingdotseq\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^s}-\frac{N^{1-s}}{1-s}$$

という表示がある (もちろん，この近似の誤差は t に依存しているので全くいい加減であるが)．右辺第 2 項は $\zeta(s)$ が $s=1$ に極を持つことから生じている．この表示を用いて

$$
\begin{aligned}
U_{\zeta_\sigma}(u,v) &\fallingdotseq \int_{-\infty}^{\infty}\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^{\sigma+it}}e^{-u|t|-itv}dt - \int_{-\infty}^{\infty}\frac{N^{1-\sigma-it}}{1-\sigma-it}e^{-u|t|-itv}dt \\
&=\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^\sigma}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-u|t|-it(v+\log n)}dt \\
&\quad - N^{1-\sigma}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-u|t|-it(v+\log N)}\int_{-\infty}^{0}e^{y(1-\sigma-it)}dydt \\
&=\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^\sigma}\cdot\frac{2u}{u^2+(v+\log n)^2} \\
&\quad - N^{1-\sigma}\int_{-\infty}^{0}e^{y(1-\sigma)}\frac{2u}{u^2+(v+\log N+y)^2}dy \\
&=I_1+I_2
\end{aligned}
$$

と計算できる．I_1 の表示から，この部分のスペクトル集合への貢献は $\{-\log n\}_{n=1}^{\infty}$ であろうことが推測される．一方，I_2 のスペクトル集合への貢献は何であろうか．

$$I_2 = -2\pi N^{1-\sigma}\int_{-\infty}^{0}e^{y(1-\sigma)}\frac{u}{\pi(u^2+(-v-\log N-y)^2)}dy$$

と変形しておく．次の記号を導入しよう：

$$g(y)=\begin{cases}0, & y\geq 0,\\ e^{y(1-\sigma)}, & y<0,\end{cases}\qquad P_u(y)=\frac{u}{\pi(u^2+y^2)}.$$

ここで，$P_u(y)$ は $\mathbf{R}$ 上の Poisson 核である．これらの記号と通常の合成積の記号 $*$ を用いることによって

$$I_2=-2\pi N^{1-\sigma}(g*P_u)(-v-\log N)$$

とかける．Poisson 核の性質から，$u\to+0$ としたとき，$(g*P_u)(-v-\log N)$ はほとんど至るところ $g(-v-\log N)$ に収束する．よって，N を調節しておいて

$$I_2\to -2\pi e^{-(1-\sigma)v},\quad u\to+0,\quad \text{ほとんど至るところ } v$$

となることがわかった．従って，I_2 のスペクトル集合への貢献は $\mathbf{R}$ 全体になるであろうことが推察される．以上のアイデアをもとに厳密に評価を行うことによって次を得る．

定理 $0 < \sigma < 1$ のとき，$\mathrm{Sp}'(\zeta_\sigma) = \mathbf{R}$ となる．

以下では，この定理の応用を考察しよう．

$\sigma < 1$ のとき，ζ_σ を何らかのBanach空間の元とみたい．一方，そのBanach空間の元 φ について，定義1の類似を考え，その類似の定義と定義2の $\mathrm{Sp}'(\varphi)$ がどのような関係にあるかを議論したい．どのようなBanach空間がふさわしいかはもちろんよくわからないけれど，ここでは平均値定理の性質を活かしたものを考察しよう．

$$\mathcal{B} = \{\Phi : \mathbf{R} \to \mathbf{C}; \text{局所的に二乗可積分 } s.t. \sup_{T>0} \frac{1}{1+2T} \int_{-T}^{T} |\Phi(t)|^2 dt < \infty\}$$

はBanach空間である．$1/2 < \sigma < 1$ のとき，平均値定理により ζ_σ は $\mathcal{B}$ に属す．この空間はBeurling の Banach 環 $\mathcal{A}$ (定義は原論文 [2] を参照してください) の共役空間 $\mathcal{A}^*$ に，Banach 空間として同型であることが証明されている ([2] の Theorem 1,2)．そこで，$\mathcal{B}(= \mathcal{A}^*)$ に $\mathcal{A}$ から導入される $*$ 弱位相を導入しよう．やはり，$\{e^{i\lambda t}\}_{\lambda \in \mathbf{R}}$ で張られる空間の $*$ 弱閉包が $\mathcal{B}$ に一致することがわかる．

定義 3 $\varphi \in \mathcal{B}$ に対し

$$\mathrm{Sp}(\varphi) = \bigcap_{f \in \mathcal{A}, f * \varphi = 0} \{\lambda \in \mathbf{R} \ s.t.\ \widehat{f}(\lambda) = 0\}$$

と定義する．$\mathrm{Sp}(\varphi)$ を φ のスペクトル集合という．

$\varphi \in \mathcal{B}$ のスペクトル集合に関して，以下の結果が Wermer [5] によって証明された (今，簡単のため議論を $\mathcal{B}$ に制限しているが Wermer の結果はいくつかの公理を満たす広いクラスの Banach 環について導かれている)．

事実 3 $\varphi \in \mathcal{B}$ とする．

$$\mathrm{Sp}'(\varphi) \subset \mathrm{Sp}(\varphi)$$

となる．

事実 4 $\varphi \in \mathcal{B}$ とする．$\Lambda \subset \mathbf{R}$ は，$\mathcal{B}$ において $\{e^{i\lambda t}\}_{\lambda\in\Lambda}$ で張られる空間の $*$ 弱閉包を考えたときこの中に φ が入る，ものとする．このとき

$$\mathrm{Sp}(\varphi) = \bigcap_{\Lambda} \{\text{そういう } \Lambda\}$$

となる．

事実 5 $\varphi \in \mathcal{B}$ とする．$\mathcal{C}$ は $\{\varphi(t+\tau)\}_{\tau\in\mathbf{R}}$ で張られる空間の $*$ 弱閉包とする．このとき

$$\mathrm{Sp}(\varphi) = \{\lambda \in \mathbf{R} \ s.t. \ e^{i\lambda t} \in \mathcal{C}\}$$

となる．

$1/2 < \sigma < 1$ のとき，定理と事実 3 により，$\mathrm{Sp}(\zeta_\sigma) = \mathbf{R}$ がわかる．このことと事実 4, 5 によりただちに次を得る．

系 $1/2 < \sigma < 1$ とする．

(i) どんな $\Lambda \subsetneq \mathbf{R}$ をとってきても，$\mathcal{B}$ において $\{e^{i\lambda t}\}_{\lambda\in\Lambda}$ で張られる空間の $*$ 弱閉包に ζ_σ は属さない．

(ii) $\mathcal{B}$ と，$\mathcal{B}$ において $\{\zeta_\sigma(t+\tau)\}_{\tau\in\mathbf{R}}$ で張られる空間の $*$ 弱閉包は集合として等しい．

References

[1] A. Beurling, *Sur les spectres des fonctions*, Colloques internationaux du centre national de la recherche scientifique, Analyse harmonique, XV, Nancy, 1947, 9–29.

[2] A. Beurling, *Construction and analysis of some convolution algebras*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **14** (1964), 1–32.

[3] Y. Kamiya, *On spectrums of certain harmonic functions attached to the Riemann zeta-function*, preprint.

[4] Y. Kamiya, *A note on the spectrum of the Riemann zeta-function*, preprint.

[5] J. Wermer, *On a class of normed rings*, Ark. Mat., **2** (1953), 537–551.